

Arvio todennäköisyydelle

January 15, 2022

1 Ongelma

Ensin ymmärryksen ongelma. Kuutiot ovat peräkkäin tai vaikkapa alekkain ja saman kokoisia ja viiva on mikä tahansa viiva? Jos näin on niin voidaan ajatella seuraavasti.

1. On kaksi tapausta. Kuutiot ovat peräkkäin x-akselilla. Tämä oli tandem.
2. Kuutiot ovat peräkkäin mutta kuutio 2 onkin siirtynyt x-akselin ja z-akselin suuntaan. Tämä on hankalampi ja käyn läpi vain ensimmäisen tapauksen.

Seuraavassa rajoitun ensimmäiseen tapaukseen. Sekin oli yllättävän kinkkinen.

2 Lasku

2.1 Mitä on laskettava?

Mitä on laskettava?

1. Tarkastellaan perättäisiä kuutioita 1 ja 2 x-akselilla. Jos viiva menee molempien poikki niin sen täytyy mennä vastapäätä olevien x-akselin sivujen läpi. Se voi tulla jommasta kummasta. Tilanteet ovat symmetriset ja todennäköisyys on 2 kertaa jompaa kumpaa tapausta vastaava. Jos kuutio 1 on origossa, tahon yhtälö on $x = a, -a < y < a, -a < z < a$. Jos kuutio 2 on x-akselilla niin yhtälö vastapäiselle taholle on $x = B - a, -a < y < a, -a < z < a$.

On laskettava mikä osuus $x = a$ tahosta lähtevistä viivoista leikkaa tahoa $x = B - a, B - a > a$ ($B - a > a$ takaa sen etteivät kuutio mene päällekkäin)

2. Mikä on todennäköisyys sille, että kuution 1 tahon T_1 pisteestä $(x = a, y, z)$ lähtevä viiva leikkaa kuution 2 tahon T_2 ? Huom: y ja z varioivat ja määräävät nelön, sivu a . Todennäköisyys $p(y, z)$ pisteelle on avaruuskulma $\Omega(y, z)$, jonka kuution 2 taho virittää tästä pisteestä katsottuna jaettuna koko avaruuskulmalla 4π . Todennäköisyys on osuus koko avaruuskulmasta

$$p(y, z) = \frac{\Omega(y, z)}{4\pi} .$$

3. Koko taholle ala $A = 4a^2$ ja haettu todennäköisyys P on keskiarvo näistä todennäköisyyksistä

$$P = \frac{\int p(y, z) dy dz}{4a^2} .$$

2.2 Avaruuskulman $\Omega(y, z)$ lauseke

Pitää siis johtaa ensin avaruuskulman $\Omega(y, z)$ lauseke.

1. Sille löytyy integraalikaava muotoa

$$\Omega(y, z) = \int_{T_2} d\Omega \quad .$$

missä T_2 on vastakkainen taho ja

$$D\Omega = d(\cos(\theta)d\phi) = dud\phi \quad .$$

2. Pallokoordinaatit (θ, ϕ) pisteessä $x = a, y, z$ tarvitaan. On laskettava (θ, ϕ) , jokaiselle T_2 :n pisteelle, toisin sanoen suuntakulmag tahojen pisteitä yhdistävälle suoralle.

Suunta-vektori on $(S_1, S_2, S_3) = (B - 2a, Y - y, Z - z)$ ja sen suuntakulmat ovat

$$u = \cos(\theta) = \frac{S_3}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \quad , \quad \tan(\phi) = \frac{S_2}{S_1} = \frac{Y-y}{B-2a} \quad .$$

3. $d\Omega = dud\phi$ on lausuttava integroitimuuttujien Y ja Z avulla. Tässä tarvitaan useampiulotteista integrointia. Täytyy laskea Jacobin determinantti

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(u, \phi)}{\partial(Y, Z)} \\ &= \partial_Y u \partial_Z \phi - \partial_\phi u \partial_Z u \quad . \end{aligned}$$

$J : n$ laskeminen on suoraviivaista osittaisiderivaattojen laskua. Löytyy varmasti symboleja manipuloivia ohjelmia jotka tekevät laskut oikein. Sitä paitsi varmasti löytyy netistä vastaus Ω :n laskuun.

2.3 Avaruuskulman Ω ja todennäköisyyden yleiset lausekkeet

Seuraavassa lasken toden-näköisyyden P niin pitkälle kuin on analyttisesti mahdollista. Lasku nojaa integrandin symmetrioihin, jotka redusoivat 2 integrointia triviaaleksi ja jäljelle jää kaksi integraalia joista useimmissa tapauksissa molemmat voidaan suorittaa eksplisiittisesti.

1. Koska $\tan(\phi)$ riippuu vain Y :sta saadaan ketjusäännöllä ja käänteisfunktion derivaatan kaavan avulla

$$\begin{aligned} J &= \partial_Z u \partial_Y \phi \\ &= \partial_Z u \times \frac{1}{B-2a} \times \partial_{\tan(\phi)} \phi \\ &= \partial_Z u \times \frac{1}{B-2a} \times \cos^2(\phi) \quad . \end{aligned}$$

Tässä on siis käytetty derivointisääntöä

$$\partial_{\tan(\phi)} \phi = \frac{1}{\partial_\phi \tan(\phi)} = \cos^2(\phi) \quad .$$

2. Jäljellä on $\partial_Z u$:n lasku.

$$u = S_3 / \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

ja

$$(S_1, S_2, S_3) = (B - 2a, Y - y, Z - z) \quad .$$

Tässä oli alkuperäisessä laskussa virhe: olin kirjoittanut $S_1^2 + S_2^2 S_1^+ S_2^2 + S_3^2$ sijasta. Siitä koitui paljon harmia!

Z-riippuvuutta tulee S_3 sekä osoittajassa että nimittäjässä $\partial_Z S_3 = 1$. Saadaan

$$\begin{aligned}\partial_Z u &= \frac{1}{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}} - \left(\frac{S_3^2}{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{(S_1^2 + S_2^2)^{1/2}}{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{3/2}} .\end{aligned}$$

3. Kaiken kaikkiaan saadaan

$$J = \frac{1}{X} \times \cos^2(\phi) \times \frac{(S_1^2 + S_2^2)^{1/2}}{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{3/2}} , \quad X = B - 2a .$$

4. Tässä voidaan vielä käyttää kaavaa

$$\cos^2(\phi) = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2} = \frac{X^2}{X^2 + (Y - y)^2}$$

jolloin saadaan

$$J = \frac{X}{(X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} , \quad X = B - 2a .$$

On siis laskettava avaruuskulma $\Omega(y, z)$ integraalinen Y :n ja Z :n yli

$$\Omega(y, z) = \frac{1}{4\pi} \int X \times \int (X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2)^{-3/2} dY dZ , \quad X = B - 2a .$$

ja lisäksi todennäköisyys P keskimääräisenä avaruuskulmana

$$\begin{aligned}P &= \frac{\int dy dz \Omega(y, z)}{4a^2} \\ &= \frac{1}{16\pi a^2} \times X \times \int (X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2)^{-3/2} dy dz dY dZ\end{aligned}$$

Osoittautuu käteväksi laskea suoraan P .

P on verrannollinen X ään. Rajalla, jolla detektorit koskettavat toisiaan, on $X = 0$ ja $P = 0$. Oikea tulos olisi $P = 1$. Syy diskrepanssiin on, että arvio toimii vain kun $X > 0$. $X = 0$ tapauksessa integraaliin kontribuovat pisteet ovat rajapinnalla ja avaruuskulma-alue degeneroituu 2-D pallon-pinnan alueesta ympyräksi, joten tulos häviää.

2.3.1 Todennäköisyyteen P liittyvien integraalien lasku

4-dimensioiden integraali on kyseessä. Vain $Y - y$ ja $Z - z$ esiintyvät integrandissa. Siirtyminen muuttujiin $Y_{\pm} = Y \pm y$ ja $Z_{\pm} = Z \pm z$ sallii integroida Y_+ ja Z_+ :n yli ja tuloksena kummastakin integraalista on integrointivälin pituus, joka riippuu lineaarisesti Y_- ja Z_- muuttuja.

Integrointi-alue koordinaateissa Y_- , Y_+ ja vastaavasti koordinaateissa Y_+ , Z_+ on neliö jota on kierretty niin että neliön kärjet ovat akseleilla Y_- (vastaavasti Z_-) pisteissä $\pm 2a$. Integrointialue Y_- :lle (vastaavasti Z_- :lle) on kaksi kolmiota. Kolmiot ovat identtiset, joten saadaan integraali yli kahden kolmion karteesisen tulon. Integrandi on tulo funktioista

$$I(Y_-, Z_-) = 4X I_1(Y_-, Z_-) I_2(Y_-, Z_-)$$

ja

$$I_2(Y_-, Z_-) = (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} ,$$

ja painofunktiosta $I_1(Y_-, Z_-)$, joka esittää integroinnin tuloksen muuttujien Y_+ ja Z_+ suhteen $-2a \leq Y_- \leq 2a$ (vastaavasti kolmion $-2a \leq Y_- \leq 2a$). Näitten muuttujien suhteenhan integrandi on vakio. Painofunktio I_1 tuloksena näistä integraaleista on tulo

$$I_1(Y_-, Z_-) = g(Y_-)g(Z_-) ,$$

missä $g(V)$ on ”kolmionfunktio” joka on nolasta poikkeava kolmiolle joka vastaa neliön puolikasta diagonaalia pitkin ja jolle yksi kärki on Y_- (vastaavasti Z_-) akselilla:

$$g(V) = \theta(-V)(-2a + V)\theta(V + 2a) + \theta(V)\theta(V - 2a) = g_+(V) + g_-(V) \quad .$$

Saadaan siis 4 integrointialuetta kolmion karteesisina tuloina kolmion puoliskoista. Vastaten

$$I_1(Y_-, Z_-) = g(Y_-)g(Z_-) = g_+(Y_-)g_+(Z_-) + g_+(Y_-)g_-(Z_-) + g_-(Y_-)g_+(Z_-) + g_-(Y_-)g_-(Z_-) \quad .$$

Tuloksena on neljän integraalin summa

$$I = \sum I^{ij} = I^{11} + 2I^{12} + I^{22} \quad .$$

On kätevää muuntaa integrointirajat samoiksi sopivilla muuttujan vaihdoilla.

$$\begin{aligned} I^{11} &= \int_{-2a}^0 dY_- (2a + Y_-) \int_{-2a}^0 dZ_- (2a + Z_-) (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \\ &= \int_0^{2a} dY_- (2a - Y_-) \int_0^{2a} dZ_- (2a - Z_-) (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \quad , \\ I^{12} &= I^{21} = \int_{-2a}^0 dY_- (2a + Y_-) \int_0^{2a} dZ_- (2a - Z_-) (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \\ &= \int_0^{2a} dY_- (2a - Y_-) \int_0^{2a} dZ_- (2a - Z_-) (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \quad , \\ I^{22} &= \int_0^{2a} dY_- (2a - Y_-) \int_0^{2a} dZ_- (2a - Z_-) (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \quad . \end{aligned}$$

Kaavoista näkyy, että pätee $I^{11} = I^{22}$ ja $I^{12} = I^{21} = I^{11} = I^{22}$ joten pätee

$$I = 4I^{11}$$

Riittää siis laske I^{11} .

I^{11} antaa 3 eri tyyppistä integraalia.

$$\begin{aligned} I^{11} &= 4a^2 I_a + -2a I_b + I_c \quad , \\ I_a &= \int_0^{2a} dY_- \int_0^{2a} dZ_- (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \quad , \\ I_b &= - \int_0^{2a} dY_- \int_0^{2a} dZ_- Z_- (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \quad , \\ I_c &= \int_0^{2a} dY_- Y_- \int_0^{2a} dZ_- Z_- (X^2 + Y_-^2 + Z_-^2)^{-3/2} \quad . \end{aligned}$$

2.3.2 Integraalien I_a, I_b, I_c analyyttinen lasku

Nämä integraalit voidaan laskea eksplisiittisti lukuuottamatta integraalia I_a .

1. I_a :ssa vain toinen integrointi voidaan suorittaa analyyttisesti. Inegraali fuktio $\int (1+u^2)^{-3/2} du$ on

$$\int (1 + u^2)^{-3/2} du = \frac{u}{(1 + u^2)^{1/2}} - \operatorname{arsinh}(u) \quad .$$

Muuttujan vaihdolla $Z_- \rightarrow Z_-/(X^2 + Y_-^2)^{1/2} = u$ saadaan I_a :lle esitys

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^{2a} dY_- \frac{1}{X^2 + Y_-^2} h(Y_-) \quad , \\ h(Y_-) &= \left[\left(\frac{u}{1+u^2} \right)^{1/2} - \operatorname{arsinh}(u) \right]_{u=2a/\sqrt{X^2+Y_-^2}} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

2. I_b ja I_c voidaan integroida sekä Y_- :n että Z_- :n suhteen ja saadaan

$$\begin{aligned}
 I_b &= \int_0^{2a} dY_- [(X^2 + Y_-^2 + (2a)^2)^{-1/2} - (X^2 + Y_-^2)^{-1/2}] \\
 &= \sqrt{X^2 + 4a^2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{2a}{\sqrt{X^2 + 4a^2}}\right) - X \operatorname{arsinh}\left(\frac{2a}{X}\right) , \\
 I_c &= \int_0^{2a} dY_- Y_- [(X^2 + Y_-^2 + (2a)^2)^{-1/2} - (X^2 + Y_-^2)^{-1/2}] \\
 &= \left|_0^{2a} [(X^2 + Y_-^2 + (2a)^2)^{1/2}] - (X^2 + Y_-^2)^{1/2} \right] = (X^2 + 8a^2)^{1/2} - 2(X^2 + 4a^2)^{1/2} + X .
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3.3 Lopputulos

Haettu todennäköisyys saadaan seuraavasta kaavasta

$$P = \frac{I}{4\pi 4a^2} = \frac{4I^{11}}{4\pi 4a^2} = \frac{I_a + 2I_b + I_c}{4\pi a^2} . \tag{2.3}$$

Jäljelle jää vain I_a :n liittyvä numeerinen integrointi. Lausekkeet integraaleille I_a , I_b ja I_c löytyvät edelleisen osion numeroiduista kaavoista.